วิธีเรียงสับเปลี่ยน

2. วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมดแบบเส้นตรง

ถ้ามีของ n สิ่ง ในของ n สิ่งนี้ มี n_1 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 1 n_2 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 2 n_3 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 3 ... และ n_r สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ r โดยที่ $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$

นำของทั้ง n สิ่งนี้มาจัดเรียงแบบเชิงเส้น จะทำได้ $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_r!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 จะมีวิธีนำอักษรในคำว่า MISSISSIPPI มาเรียงสับเปลี่ยนกันใหม่หมดได้กี่วิธี

วิธีทำ ตัวอักษรในคำว่า MISSISSIPPI มีทั้งหมด 11 ตัว

มี S เหมือนกัน (ซ้ำกัน)	4	ตัว
มี I เหมือนกัน (ซ้ำกัน)	4	ตัว
มี P เหมือนกัน (ซ้ำกัน)	2	ตัว
มี M เหมือนกัน (ซ้ำกัน)	1	ตัว

ดังนั้น จากกฎการเรียงสับเปลี่ยน จะมีจำนวนวิธีที่จะทำได้เท่ากับ

$$\frac{11!}{4!4!2!1!} = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot\cancel{8}\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot\cancel{2}\cdot(\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2})}$$

$$= 11 \times 10 \times 9 \times 7 \times 5$$

$$= 34{,}650 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้ามีเหรียญ 1 บาท 4 เหรียญ เหรียญ 5 บาท 3 เหรียญ นำเหรียญดังกล่าวมาแจกให้เด็ก 7 คน คนละ 1 เหรียญ จะมีวิธีแจกเงินเพื่อให้เด็กได้รับเงินที่มีค่าแตกต่างกันได้กี่วิธี

วิธีทำ มีเหรียญทั้งหมด 7 เหรียญ

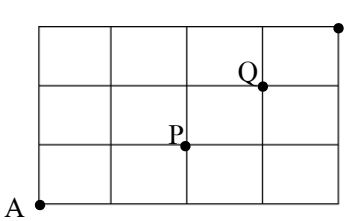
มีเหรียญ 1 บาท เหมือนกัน 4 เหรียญ

มีเหรียญ 5 บาท เหมือนกัน 3 เหรียญ

จะเห็นว่า การแจกเงินให้เด็ก 7 คนๆ ละ 1 เหรียญ ก็เปรียบเสมือนการเอาเหรียญ 7 อันมาเรียงกันเป็นแถวนั่นเอง

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะทำได้เท่ากับ $\dfrac{7!}{4!3!} = 7 \times 5 = 35$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดเส้นแต่ละเส้นในรูปต่อไปนี้แทนถนน ถ้านายก จะเดินทางจากจุด A ไปจุด B โดยที่ในการเดินทางแต่ละครั้งจะต้องไปทางทิศตะวันออก หรือทิศเหนือเท่านั้น นาย ก จะเลือกเดินทางได้กี่วิธี ถ้า



(1) ไม่มีเงื่อนไขใดๆ ในการเดินทาง

(2) ในการเดินทางต้องผ่านจุด P

(3) ในการเดินทางต้องผ่านจุด P และ Q

วิธีทำ จากรูปจะเห็นว่า ในการเดินทางจากจุด A ไปยังจุด B นั้น ต้องเดินไปทางทิศตะวันออก 4 ช่อง แล้วเดินไปทางทิศเหนือ 3 ช่อง

ให้ อ หมายถึง การเดินทางไปทิศตะวันออกแต่ละช่อง

น หมายถึง การเดินทางไปทิศเหนือแต่ละช่อง

(1) ไม่มีเงื่อนไขใดๆ ในการเดินทาง

การเดินทางจากจุด A ไปยังจุด B เปรียบเสมือนกับการนำอักษร อ 4 ตัว และอักษร น 3 ตัว มาเรียงเป็นแถว นั่นคือ นาย ก จะเดินทางจาก A ไป B ได้ $= \frac{7!}{4!3!} = 35$ วิธี

(2) ในการเดินทางต้องผ่านจุด P

จากเงื่อนไขดังกล่าว แสดงว่า การเดินทางจากจุด A ไปจุด B ต้องกระทำต่อเนื่อง 2 ขั้นตอน คือ

ขั้นตอนที่ 1 เดินทางจาก A ไป P เหมือนการนำตัวอักษร อ 2 ตัว และ น 1 ตัว มาจัดเรียงแถว จำนวนวิธีที่ทำได้ $= \frac{3!}{2!1!} = 3$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เดินทางจาก P ไป B เหมือนการนำตัวอักษร อ 2 ตัว และ น 2 ตัว มาจัดเรียงแถว จำนวนวิธีที่ทำได้ $= \frac{4!}{2!2!} = 6$ วิธี

จากหลักการนับเบื้องต้นจะได้ว่า

นาย ก จะเดินทางจาก A ไป B โดยผ่านจุด P ได้ $3 \times 6 = 18$ วิธี

(3) ในการเดินทางต้องผ่านจุด P และ Q

จากเงื่อนไขดังกล่าว ใช้แนวคิดเช่นเดียวกับข้อ (2)

แสดงว่า การเดินทางจากจุด A ไปจุด B ต้องกระทำ 3 ขั้นตอนต่อเนื่องตามลำดับ ดังนี้ คือ

ขั้นตอนที่ 1 จาก A ไป P จะเดินได้ อ, อ, น จำนวนวิธีที่ทำได้ $= \frac{3!}{2!1!} = 3$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จาก P ไป Q จะเดินได้ อ, น จำนวนวิธีที่ทำได้ $= 2! = 2$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 จาก Q ไป B จะเดินได้ อ, น จำนวนวิธีที่ทำได้ $= 2! = 2$ วิธี

จากหลักการนับเบื้องต้น

นาย ก จะเดินทางจาก A ไป B โดยผ่านจุด P และ Q ได้ $3 \times 2 \times 2 = 12$ วิธี

แบบฝึกหัด

1. จะมีวิธีทั้งหมดกี่วิธีที่จะนำตัวอักษรจากคำว่า “กนกวรรณ” ทั้งหมด มาเรียงเป็นคำโดยไม่คำนึงถึงความหมาย

วิธีทำ มีตัวอักษรทั้งหมด 7 ตัวที่ไม่แตกต่างกันหมด ดังนี้

ก = 2 ตัว น = 1 ตัว ว = 1 ตัว ร = 2 ตัว ณ = 1 ตัว

จะสามารถจัดเรียงได้ $\frac{7!}{2!1!1!2!1!} = \frac{7x6x5x\cancel{4}^{2}x3x\cancel{2!}}{\cancel{2!}x\cancel{2}x1} = 7 \times 6 \times 5 \times 2 \times 3 = 1260$ คำ

2. มีหนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่มเหมือนกัน หนังสือภาษาอังกฤษ 4 เล่มเหมือนกัน หนังสือภาษาไทย 2 เล่ม เหมือนกัน จะมีวิธีที่นำหนังสือทั้ง 9 เล่ม มาจัดเรียงเป็นแถวโดยมีเงื่อนไขว่า หนังสือภาษาอังกฤษต้องอยู่ติดกันทั้งหมด

วิธีทำ มีหนังสือทั้งหมด 9 เล่มไม่แตกต่างกันทั้งหมด ดังนี้

หนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่ม หนังสือภาษาอังกฤษ 4 เล่ม หนังสือภาษาไทย 2 เล่ม

แต่โจทย์กำหนดให้หนังสือภาษาอังกฤษต้องอยู่ติดกันทั้งหมด มันรวมทั้ง 4 เล่มนับเป็น 1 เล่ม

ดังนั้นเท่ากับมา มีหนังสือทั้งหมด 6 เล่ม

$\therefore$ จะมีวิธีจัดเรียงทั้งหมด $\frac{6!}{3!1!2!} = \frac{6x5x\cancel{4}^{2}x\cancel{3!}}{\cancel{3!}x\cancel{2}x1} = 6 \times 5 \times 2 = 60$ วิธี

3. ถ้าเรานำตัวอักษรจากคำว่า ELEVEN มาสลับที่กันทั้งหมด จะได้วิธีที่แตกต่างกันกี่วิธี ถ้าให้ E ทั้งสามตัวนี้อยู่ติดกัน

วิธีทำ เมื่อกำหนด E 3 ตัวอยู่ติดกันนับเป็น 1 ตัวอักษร เท่ากับว่ามีตัวอักษรทั้งหมด 4 ตัวต่างกันหมด

$\therefore$ จะมีวิธีจัดเรียงได้ $4! = 24$ วิธี

4. ชายขี้เมาคนหนึ่ง สามารถก้าวไปข้างหน้าหรือข้างหลังก็ได้ ถ้าเขาเดินทั้งหมด 11 ครั้ง เขาจะมีวิธีเดินกี่วิธี เมื่อเดินครบ 11 ก้าวแล้ว ตัวเขาจะยืนอยู่ห่างจากจุดตั้งต้นไปข้างหน้า 5 ก้าว

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่ามีการเดินทั้งหมด 11 ครั้ง เดินหน้าหรือถอยหลังก็ได้

จะได้ เดินหน้า + ถอยหลัง = 11 ..... (1)

และหลังจากเดินแล้วอยู่ห่างจุดตั้งต้นไปข้างหน้า 5 ก้าว หมายความว่าเดินหน้ามากว่าถอยหลัง 5 ก้าว

จะได้ เดินหน้า – ถอยหลัง = 5 .....(2)

จากระบบสมการจะได้ว่าชายขี้เมา เดินหน้า 8 ก้าว และถอยหลัง 3 ก้าว เดินทั้งหมด 11 ก้าว

$\therefore$ วิธีการเดินทั้งหมด เท่ากับ $\frac{11!}{8!3!} = \frac{11x\cancel{10}^{5}x\cancel{9}^{3}x\cancel{8!}}{\cancel{8!}x\cancel{3}x\cancel{2}x1} = 11 \times 5 \times 3 = 165$ วิธี

5. ถ้ามีบัตรชมภาพยนตร์ชั้นหนึ่งอยู่ 2 ใบ ชั้นสอง 3 ใบ ชั้นสาม 2 ใบ จะมีกี่วิธีที่จะแจกบัตรชมภาพยนต์เหล่านี้ให้เด็ก 7 คนๆ ละ 1 ใบ

วิธีทำ มีบัตรชมภาพยนตร์ทั้งหมด 7 ใบ ที่ไม่แตกต่างกันหมด สลับกันให้เด็กคนละใบ

$\therefore$ จะมีวิธีในการจัดทั้งหมด $\frac{7!}{2!3!2!} = \frac{7x6x5x\cancel{4}x\cancel{3!}}{\cancel{2}x\cancel{3!}x\cancel{2}} = 7 \times 6 \times 5 = 210$ วิธี

6. ถ้านำตัวอักษรทั้งหมดจากคำว่า AVATAR มาจัดเรียงเป็นคำต่างๆ โดยไม่จำเป็นต้องมีความหมาย จะจัดเป็นคำที่แตกต่างกันได้กี่วิธี (ข้อสอบO-NET ปี 54)

วิธีทำ มีตัวอักษรทั้งหมด 6 ตัวที่ไม่แตกต่างกันหมด ดังนี้

A = 3 ตัว V = 1 ตัว T = 1 ตัว R = 1 ตัว

$\therefore$ สามารถสลับที่กันได้ทั้งหมด $\frac{6!}{3!1!1!1!} = \frac{6x5x4x\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6 \times 5 \times 4 = 120$ วิธี

7. เราสามารถสร้างสัญญาณธงได้กี่วิธี ถ้ามีธงสีแดง 4 ผืน สีขาว 3 ผืน และสีน้ำเงิน 2 ผืน โดยที่นำธงเหล่านี้มาผูกเรียงกันเป็นแถวยาว

วิธีทำ มีธงทั้งหมด 9 ผืน ไม่แตกต่างกันหมด

$\therefore$ จะมีวิธีในการสร้างสัญญาณธงได้ $\frac{9!}{4!3!2!} = \frac{9\times 8^{4}\times 7\times 6\times 5\times 4!}{4!\times 3\times 2\times 2} = 9\times 4\times 7\times 5 = 1260$ วิธี

8. มีหลอดไฟสีขาว 4 หลอด สีแดง 5 หลอด และสีน้ำเงิน 6 หลอด ต้องการนำหลอดไฟทั้งหมดไปประดับตามรั้วในแนวเส้นตรงจะประดับได้กี่วิธีที่แตกต่างกัน เมื่อหลอดไฟสีเดียวกันไม่แตกต่างกัน

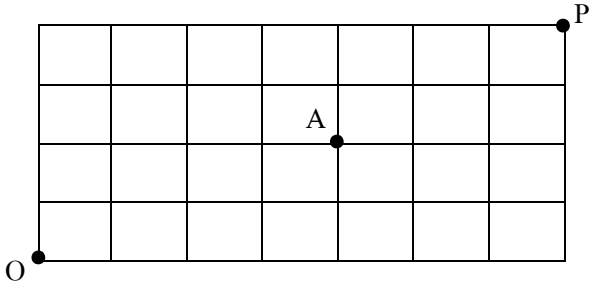
วิธีทำ มีหลอดไฟทั้งหมด 15 หลอดไม่แตกต่างกันหมด ประดับรั้วเป็นเส้นตรง

$\therefore$ จะสามารถประดับได้ $\frac{15!}{4!5!6!} = \frac{15^{5}\times 14\times 13\times 12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6!}{4\times 3\times 2\times 1\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1\times 6!} = 5\times 14\times 13\times 11\times 9\times 7$

$= 630{,}630$ วิธี

9. กำหนดแผนผังเมืองหนึ่งดังรูป เส้นในแผนผังแทนถนน ต้องการเดินทางออกจากจุด O ไปยังจุด P โดยมีเงื่อนไขว่าจะต้องเดินทางไปทางทิศเหนือหรือทิศตะวันออกเท่านั้น จงหาจำนวนเส้นทางเดินทั้งหมดจากจุด O ไปยังจุด P โดย

1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม 2) เส้นทางเดินต้องผ่านจุด A 3) เส้นทางเดินต้องไม่ผ่านจุด A



1)ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

วิธีทำ จากโจทย์ เส้นทางจาก O ไป P มีการเดินทั้งหมด 11 ครั้ง โดยขึ้นเหนือ 4 ครั้ง และตะวันออก 7 ครั้ง

$\therefore$ จะมีวิธีในการเดินทั้งหมด $\frac{11!}{4!7!} = \frac{11\times 10\times 9^{3}\times 8\times 7!}{4\times 3\times 2\times 7!} = 11\times 10\times 3 = 330$ วิธี

2) เส้นทางเดินต้องผ่านจุด A แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เดินทางจาก O ไป A มีการเดินทั้งหมด 6 ครั้ง เหนือ 2 ออก 4

จะสามารถเดินได้ $\frac{6!}{2!4!} = \frac{^{3}6\times 5\times 4!}{2\times 4!} = 3\times 5 = 15$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เดินทางจาก A ไป P มีการเดินทั้งหมด 5 ครั้ง เหนือ 2 ออก 3

จะสามารถเดินได้ $\frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times 4^{2}\times 3!}{2\times 3!} = 5\times 2 = 10$ วิธี

$\therefore$ วิธีในการเดินทางจาก O ไป P โดยผ่ายจุด P สามารถเดินได้ $15\times 10 = 150$ วิธี

3) เส้นทางเดินต้องไม่ผ่านจุด P

$\therefore$ เส้นทางเดินไม่ผ่านจุด P = เส้นทางทั้งหมด – เส้นทางที่ผ่านจุด P

$= 330 - 150 = 180$ วิธี